(a) Soit $S = D^{-\frac{1}{2}}AD^{-\frac{1}{2}}$. Comparer les valeurs propres de S et de $D^{-1}A$. Comment leurs vecteurs propres se comportent-ils ?

(b) Montrer que le spectre de la matrice $B_\omega = I - \omega D^{-1}A$ est inclus dans $]-1, 1[$

(c) en déduire que $x^t Ax > 0$ et que $x^t(\frac{2}{\omega}D - A)x > 0$ pour tout vecteur propres x de B_ω. Déduire que ces deux matrices sont définies positives.

Ex-11 : On considère une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ inversible tel que On considère la méthode itérative $Mx_{k+1} = Nx_k + b$. Démontrer que si cette methode converge, alors $|det(M^{-1}N)| < 1$.

Ex-12 : On considère la méthode itérative $x_{k+1} = Bx_k + b$ pour résoudre le système $Ax = b$. On suppose que $A = I - B$ est symétrique inversible appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Démontrer que si la méthode itérative est convergente, alors la matrice A est définie positive.
2. Démontrer que si A et $I - A$ sont hermitiennes definies positives, alors la methode intérative converge.

Ex-13 : On considère la méthode itérative :

$$u_{k+1} = (I - \rho A)u_k + \rho b$$

où A est une matrice symétrique définie positive. Calculer les valeurs propres de la matrice $\cancel{B}I - \rho A$ en fonction de la matrice A. Etudier les valeurs de ρ pour lesquelles la méthode itérative converge et chercher la valeur minimale du rayon spectral correspondant.

Ex-14 : On considère la méthode itérative :

$$u_{k+1} = ((1+\rho\lambda)I - \rho A) - \rho b.$$

$$\cancel{u_{k+1} = ((1+2\rho\lambda)I - \rho A)u_k + b}$$

où A est une matrice symétrique définie positive et λ est une valeur positive. Calculer les valeurs propres de la matrice $B = (1 + \cancel{2}\rho\lambda)I - \rho A$ en fonction de la matrice A. Etudier les valeurs de ρ pour lesquelles la méthode itérative converge et chercher la valeur minimale du rayon spectral correspondant.